ЗАДАЧА МАКСИМІЗАЦІЇ ПРИБУТКУ ІТ-ЛАБОРАТОРІЇ В УМОВАХ РЕСУРСНИХ ОБМЕЖЕНЬ: МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Старчук А. Р.
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, м. Київ

ВСТУП

Актуальність і постановка проблеми. У сучасних умовах цифрової трансформації економіки та стрімкого розвитку ІТ-інфраструктури ефективне використання обмежених ресурсів є ключовим фактором конкурентоспроможності. Оптимізація виробничих процесів, раціональний розподіл обмежених ресурсів та максимізація прибутку природно приводить до задач оптимізації, що вимагають точного наукового інструментарію. Виникає вагома науково-практична проблема: необхідність переходу від фізичної проблеми до побудови адекватної математичної моделі оптимізаційної задачі та її розв'язання за допомогою сучасних цифрових інструментів.

Мета дослідження. Метою даної статті є побудова математичної моделі задачі максимізації прибутку ІТ-лабораторії в умовах ресурсних обмежень та її розв'язання з використанням цифрових інструментів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичні основи задач математичного програмування та методів оптимізації закладено у класичних працях з математичного програмування, зокрема у роботі Г. Данцига [1]. У навчальній літературі [2; 3; 4] розглянуто підходи до побудови економіко-математичних моделей та їх розв'язання. У монографії [5] обґрунтовані ключові аспекти використання математичних методів та інформаційних технологій в освіті й науці.

Важливою складовою розуміння оптимізаційних процесів на етапі моделювання є їх геометрична інтерпретація, зокрема, в середовищах типу GeoGebra [4; 6]. Проте, його часткова автоматизація в цих середовищах може бути неефективною через потребу самостійного виведення умов та дослідження результату графічної інтерпретації, що підвищує ризик операторських похибок. Вирішенню цієї проблеми присвячене дослідження [7], що підтверджує ефективність систем комп'ютерної математики (СКМ). Середовище Maple дозволяє повністю алгоритмізувати візуалізацію: система програмно генерує ОДЗ, знаходить (за потреби) стаціонарні точки методами диференціального числення та автоматично будує цільову функцію, виключаючи фактор "ручної" геометричної інтерпретації.

Водночас актуальним залишається питання поєднання наочних геометричних підходів із сучасними інструментами комп'ютерної математики при розв'язанні прикладних оптимізаційних задач, що й зумовлює напрям даного дослідження.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Постановка задачі та побудова математичної моделі

Задача. Лабораторія інформаційних технологій розробляє два види програмних продуктів A (модуль символьної математики) та B (модуль чисельної оптимізації). Для їх створення використовується праця розробників і тестувальників. На випуск однієї одиниці продукту A витрачається 3 години роботи розробників та 1 година роботи тестувальників. Для створення однієї одиниці продукту B витрачається 2 години роботи розробників та 2 години роботи тестувальників. Загальний тижневий фонд робочого часу розробників становить 24 години, а тестувальників - 16 годин.

Крім того, існують специфічні інфраструктурні обмеження: для функціонування продукту A необхідний доступ до закритої API-бази, квота на яку обмежена 6 ліцензійними ключами на тиждень, а для розгортання продукту B орендовано максимум 7 хмарних серверних кластерів. Прибуток від впровадження однієї одиниці продукту A складає 5 ум. од., прибуток від одиниці продукту B також дорівнює 5 ум. од. Необхідно визначити такий план випуску програмних продуктів, при яких загальний прибуток лабораторії буде максимальним за умови дотримання всіх ресурсних обмежень.

Розв'язання.

Вихідні дані задачі оптимізації виробництва програмних продуктів можна подати у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

Ресурси	Продукція		Запаси (обмеження)
	Продукція A (мод.)	Продукція B (мод.)	
Час розробників (год.)	3	2	24
Час тестувальників (год.)	1	2	16
API ліцензії (шт.)	1	0	6
Хмарні сервери (шт.)	0	1	7
Прибуток (ум. од.)	5	5	-

Критерієм оптимальності в умовах даної задачі буде прибуток лабораторії. Позначимо через x_1 кількість випущених одиниць продукту A, а через x_2 – кількість випущених одиниць продукту B.

Цільова функція: прибуток від кожного продукту – 5 умовних одиниць.

*Математична модель***.** Знайти максимум цільової функції

$$F = f(x_1, x_2) = 5x_1 + 5x_2 \rightarrow max$$

за обмежень, що враховують загальний фонд робочого часу розробників і тестувальників, специфічні інфраструктурні обмеження, та невід'ємність обсягів випуску програмних продуктів

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ця модель є задачею *лінійного програмування* з двома змінними.

2. Розв'язання задачі графічним методом (GeoGebra)

Для розв'язання задачі використовується геометрична інтерпретація. Щоб графічно розв'язати дану задачу, потрібно виконати наступні кроки:

а) будуємо граничні прямі

$$3x_1 + 2x_2 = 24,\ x_1 + 2x_2 = 16,\ x_1 = 6,\ x_2 = 7;$$

б) знаходимо координати всіх вершин опуклого багатокутника – області допустимих значень (ОДЗ);

в) будуємо вектор $\vec{N} = (c_1, c_2)$, що виходить із початку координат і направлений до точки з координатами коефіцієнтів цільової функції, що за умовою задачі відповідає вектору $\vec{N} = (5; 5)$;

г) будуємо пряму, що відповідає значенню цільової функції F = 0, тобто пряму $5x_1 + 5x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ (нормального вектора) і проходить через початок координат;

ґ) оскільки шукаємо найбільше значення цільової функції, то пересуваємо пряму $5x_1 + 5x_2 = 0$ у напрямі вектора $\vec{N}$, поки вона не досягне останньої точки області допустимих значень, щоб визначити вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із Рис. 1 бачимо, що останньою спільною точкою прямої цільової функції і багатокутника є точка C. Координати цієї точки $x_1 = 4$ та $x_2 = 6$ визначають оптимальний план виробництва.

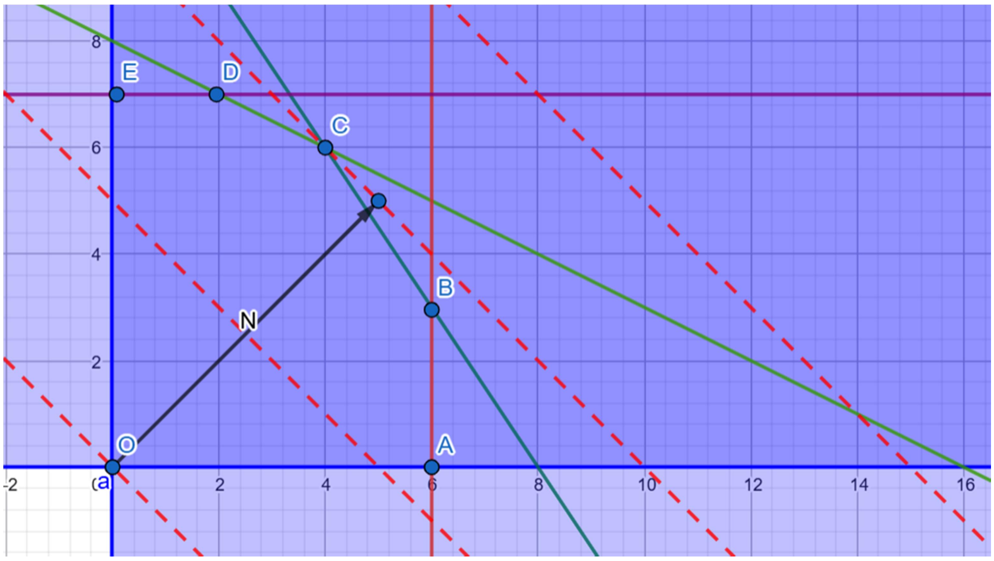

Рис 1. Графічний розв'зок задачі (GeoGebra)

Оптимальний план виробництва досягається у точці C з координатами $x_1 = 4$ та $x_2 = 6$.Це означає, що для отримання максимального прибутку лабораторія повинна розробити 4 модулі символьної математики (продукту A) та 6 модулів чисельної оптимізації (продукту B). При цьому максимальний прибуток складе 50 умовних одиниць.

3. Розв'язання задачі в середовищі Maple

У середовищі Maple створюємо універсальний код, який буде адаптований під 2 керовані змінні та 4 ресурси.

Спочатку підключаємо бібліотеки:

restart; - очищує пам'ять Maple для коректного відображення нових даних;

with(Optimization) : - завантажує пакет для оптимізації;

with(plots) : - завантажує пакет для малювання складних графіків;

with(LinearAlgebra) : - завантажує пакет для роботи з матрицями, що дозволить виводити таблицю даних.

Задаємо норми витрат, запасів ресурсів та цільових коефіцієнтів.

a11 := ... ; a12 :=... ; ...; a41 := ... ; a42 :=... ;

b1 := ... ; ... ; b4 := ... ;

c1 := ... ; c2 :=... ;

Формуємо таблицю вихідних даних.

M_table := Matrix ([[“Ресурси / Продукти”, “A1 (x1)”,”A2 (x2)”,”Запаси (b)”], [“B1”, a11, a12, b1], ... , [“B4”, a41, a42, b4], [“Прибуток (c)”, c1, c2, “-“]]) :

Формуємо рівняння цільової функції та обмежень для ресурсів та об'єднуємо в одну множину.

*f := c1*x1 + c2*x2; eq1 := a11*x1 + a12*x2 <= b1; ... ; eq4 := a41*x1 + a42*x2 <= b4;*

constraints := {eq1, eq2, eq3, eq4, x1 >= 0, x2 >= 0}:

Для розв'язання задачі потрібно використати команду LPSolve, що запускає симплекс-метод для пошуку максимуму заданої функції при дотриманні всіх обмежень.

solution := LPSolve(f, constraints, maximize);

Для побудови графічної інтерпретації задачі потрібно задати наступні команди:

plot_max :=...; - масштаб графіка;

optionsfeasible = (color = "..."), - побудова багатокутника (ОДЗ);

feasible_region := inequal(constraints, x1 = 0 .. plot_max, x2 = 0 .. plot_max, optionsexcluded = (color = "white")): - графічне відображення системи нерівностей та перевірка належності точок до ОДЗ;

objective_vector := arrow([0, 0], [c1, c2], shape = arrow, color = green, width = [0.2, relative = false], thickness = 3): - побудова вектора нормалі;

*obj_lines := contourplot(f, x1 = 0 .. plot_max, x2 = 0 .. plot_max, contours = [opt_val*0.25, opt_val*0.5, opt_val*0.75, opt_val], color = red):* - побудова ліній рівня цільової функції, які відповідають постійним значенням (наприклад 25%, 50%, 75%, 100%) від знайденого прибутку;

display({feasible_region, obj_lines, objective_vector}, title = "...", labels = ["x1", "x2"]); - накладення всіх умов на один графік.

"----- ТАБЛИЦЯ ВИХІДНИХ ДАНИХ -----"

"Ресурси / Продукти"	"A1 (x1)"	"A2 (x2)"	"Запаси (b)"
"B1"	3	2	24
"B2"	1	2	16
"B3"	1	0	6
"B4"	0	1	7
"Прибуток (c)"	5	5	"-"

"----- МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ -----"

"Цільова функція (максимізація прибутку):"

$$5\,x1 + 5\,x2 = F\_max$$

"Система обмежень:"

$$3\,x1 + 2\,x2 \leq 24$$

$$x1 + 2\,x2 \leq 16$$

$$x1 \leq 6$$

$$x2 \leq 7$$

"Умови невід'ємності: x1 >= 0, x2 >= 0"

$$solution := [50., [x1 = 4., x2 = 6.]]$$

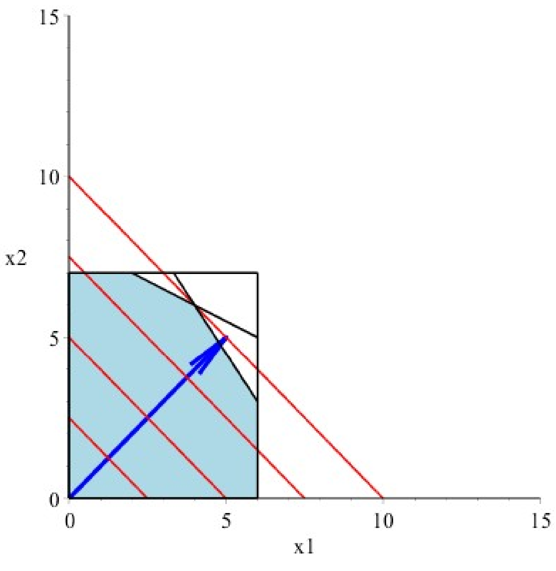

Рис. 2. Графічний метод розв’язання задачі (Maple)

Використавши умову задачі, після запуску готового коду отримуємо таблицю вихідних даних, систему обмежень, математичну модель, числовий (де оптимальний план $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ та максимальний прибуток 50) та графічний результат розв'язку задачі (Рис. 2).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто випадок оптимізаційної задачі, коли цільова функція лінійна. Оптимальне значення такої функції досягається на межі області допустимих значень, оскільки лінійна функція не має внутрішніх стаціонарних точок. Це цілком узгоджується з геометричною інтерпретацією задачі та обґрунтовує застосування методів лінійного програмування. В ході дослідження:

- побудовано математичну модель задачі оптимізації діяльності IT-лабораторії в умовах ресурсних обмежень;
- здійснено її розв'язання графічним методом за допомогою GeoGebra;
- проведено комп'ютерне моделювання в середовищі Maple із використанням симплекс-методу та графічної інтерпретації;
- отримано оптимальний план виробництва та відповідне значення максимального прибутку.

Показано, що графічний метод є доцільним для наочного аналізу задач малої розмірності, тоді як використання систем комп'ютерної математики забезпечує універсальність, автоматизацію обчислень і можливість розв'язання більш складних задач. Узгодженість отриманих результатів підтверджує коректність побудованої моделі та ефективність застосованих методів.

Подальші дослідження будуть спрямовані на розгляд задач із нелінійними залежностями, для яких основним інструментом дослідження є методи диференціального числення.

ДЖЕРЕЛА

1. Dantzig G. B. Linear Programming and Extensions / G. B. Dantzig. Princeton : Princeton University Press, 1998. 625 p.
2. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / за заг. ред. В. В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 536 с.
3. Методи оптимізації та основи пошуку оптимальних рішень : навч. посіб. / уклад. Л. Р. Ладієва. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 73 с.
4. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2003. 452 с.
5. Abramov, V. And all. Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science, 2021 [online] DOI: https://doi.org/10.28925/9720213284km
6. Скворчевський О. Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі». Харків : НТУ «ХПІ», 2014. 76 с.
7. Кайдан Н. В. Застосування системи Maple при розв'язуванні задач балансового аналізу. Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2021. Вип. 18. С. 52–59.