МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ В ДОСЛІДЖЕННІ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ

Хачатрян А. Р.
Київський столичний університет ім. Бориса Грінченка, Київ

ВСТУП

Електростатичні поля є одним із базових об’єктів дослідження математичної фізики та прикладної математики. Електростатичні поля виникають у різноманітних фізичних та технічних системах, зокрема в електроніці, енергетиці, сенсорних технологіях та телекомунікаціях. Вивчення структури таких полів дозволяє прогнозувати поведінку електричних систем, оптимізувати їх параметри та підвищувати ефективність їх функціонування.

У двовимірному випадку вони описуються потенціалом, який задовольняє рівняння Лапласа. Це дає змогу застосовувати методи комплексного аналізу, зокрема використовувати голоморфні функції для опису гармонічних полів.

Важливими інструментами є комплексний потенціал і конформні відображення, які забезпечують зручний аналітичний апарат і наочну геометричну інтерпретацію структури поля.

Актуальність і постановка проблеми. У прикладних задачах електростатики часто виникає потреба дослідження полів у областях складної геометрії або за нетривіальних граничних умов. У таких випадках пряме розв’язання рівняння Лапласа є технічно складним або й неможливим в елементарних функціях, тому використовуються чисельні методи.

Разом з тим, аналітичні підходи залишаються важливими, оскільки дозволяють виявити якісні властивості розв’язків і встановити загальні закономірності поведінки поля. Тому не втрачає актуальності проблема використання методів комплексного аналізу для моделювання електростатичних полів, зокрема дослідження можливостей комплексного потенціалу та конформних відображень при розв’язанні крайових задач.

Мета дослідження. Метою даної роботи є дослідження можливостей моделювання електростатичних полів за допомогою методів комплексного аналізу та демонстрація ефективності цих методів на прикладах типових задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Методи комплексного аналізу широко використовуються у задачах математичної фізики. Класичні результати теорії голоморфних функцій викладені в [1,2], де детально досліджуються властивості голоморфних функцій та їх застосування.

Значний внесок у розвиток прикладних аспектів комплексного аналізу зробили Джеймс В. Черчилль та Руель В. Черчилль [3], у працях яких розглядаються методи розв'язання фізичних задач за допомогою функцій комплексної змінної.

У галузі електродинаміки фундаментальними є роботи Девід Дж. Гріффітс [4], де розглядається фізичний зміст електростатичного потенціалу та напруженості поля.

Сучасні підходи до дослідження рівняння Лапласа та гармонічних функцій також розглядаються у працях Хабермана Р. [5] та Еванса Л. [6], де детально описуються методи розв'язання крайових задач математичної фізики.

Сучасні українські дослідження представлені в роботах Самойленка В.Г. [7], де, зокрема, розглядаються методи комплексного аналізу та операційного числення до розв'язування прикладних задач математичної фізики.

Таким чином, існує значна теоретична база, яка дозволяє ефективно використовувати комплексний аналіз для моделювання електростатичних полів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Теоретичні основи моделювання електростатичних полів

Нехай $\varphi(x, y)$ – потенціал електростатичного поля. За відсутності зарядів він задовольняє рівняння:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Тобто потенціал електростатичного поля є гармонічною функцією. Важливою властивістю гармонічних функцій є їх представлення через голоморфні функції:

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

де функції φ та ψ задовольняють умови Коші–Рімана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

З геометричної точки зору, якщо $\varphi = const$ і $\psi = const$, то відповідні криві утворюють сукупність еквіпотенціальних і силових лінії відповідно.

Напруженість поля визначається як $\vec{E} = -\nabla\varphi$. З цього випливає, що силові лінії ортогональні еквіпотенціальним.

2. Комплексний потенціал і його властивості

Нехай комплексний потенціал поля задано функцією $f(z) = \varphi + i\psi$.

Використання властивостей комплексного потенціалу дозволяє спростити математичний опис поля та зменшити розрахунки; поєднати потенціал з функцією струму; будувати геометричні моделі поля.

Приклад 1 (Поле одноточкового заряду) . Розглянемо функцію

$$f(z) = \ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Тоді $\varphi\ (x; y) = \ln|z| = const\,, \psi(x; y) = \arg z = const.$

Бачимо, що функція φ визначає еквіпотенціальні лінії, які мають вигляд концентричних кіл $|z| = const$, а функція ψ задає силові лінії у вигляді пучка променів $\arg z = const$. На рис. 1 еквіпотенціальні лінії зображено чорним кольором, а силові – червоним.

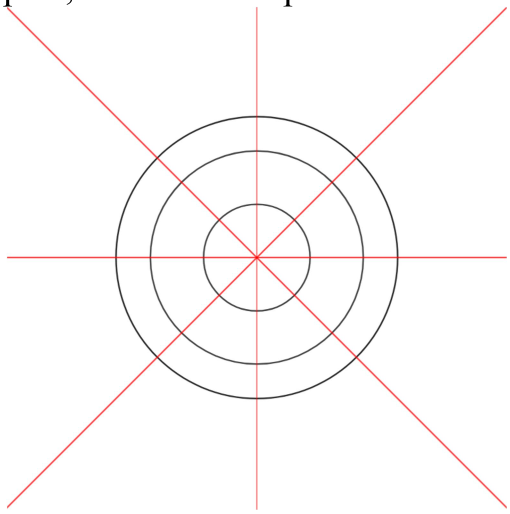

Рис. 1. Еквіпотенціальні та силові лінії електростатичного поля точкового заряду

3. Застосування конформних відображень

Важливим інструментом при дослідженні електростатичних полів є конформні відображення. Зберігаючи кути між кривими, вони допомагають перетворювати складні області в більш прості, розв'язуючи відповідні задачі в таких областях. Це особливо корисно при розв'язанні крайових задач електростатики.

Приклад 2 (Електростатичне поле в кутовій області між двома провідними півпрямими). Розглянемо задачу знаходження електростатичного поля в кутовій області

$$0 < \arg z < \alpha,$$

де на межах області задані граничні умови: $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(\mathrm{a}) = V$ (рис. 2).

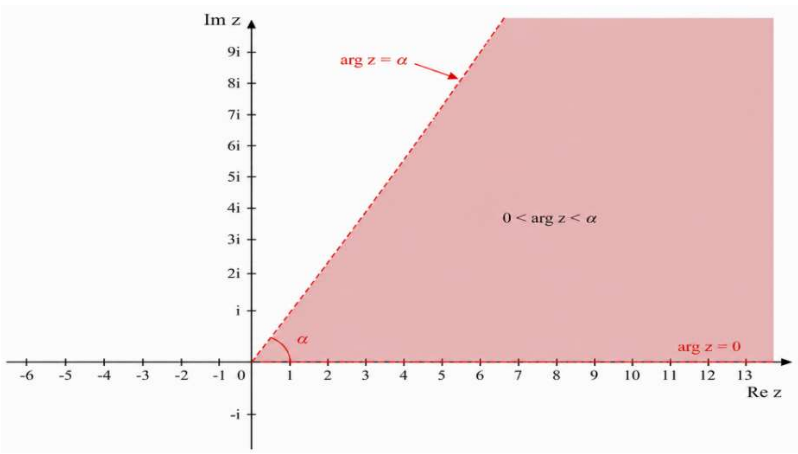

Рис. 2. Кутова область $0 < \arg z < \alpha$, у якій розглядається задача електростатичного поля

Для розв'язання задачі використаємо конформне відображення

$$w = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Запишемо z в показниковій формі, тоді: $z = re^{i\theta}$, де $r = |z|$; $\theta = \arg z$. З отримамного маємо, що аргумент нової змінної w має вигляд $\arg w = \frac{\alpha}{\pi}\arg z$. Видно, що отримане відображення переводить задану область з умови в верхню півплощину, причому межі області переходять у дійсну вісь (рис. 3).

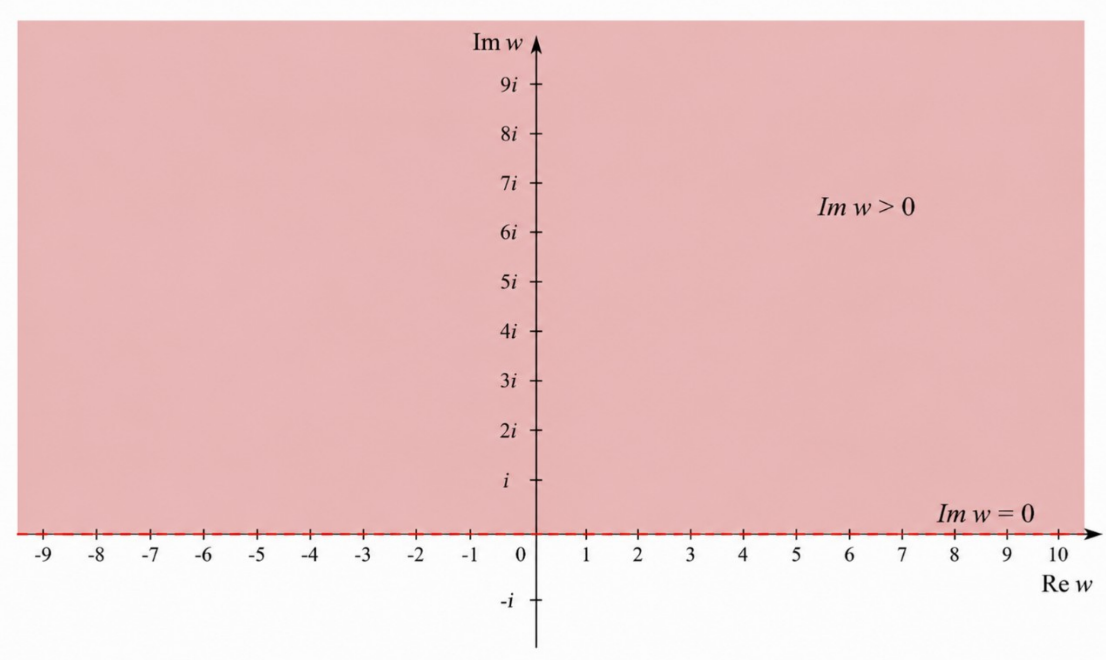

Рис. 3. Верхня півплощина $\mathrm{Im}\, w > 0$, отримана внаслідок конформного відображення кутової області

Оскільки $\arg w$ змінюється від 0 до π на межі області, то з урахуванням граничних умов потенціал має вигляд

$$\varphi(w) = \frac{V}{\pi}\arg w.$$

Повертаючись до змінної z, отримуємо:

$$\varphi(z) = \frac{V}{\pi}\arg z^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{V}{\pi}\cdot\frac{\pi}{\alpha}\arg z = \frac{V}{\alpha}\arg z\,.$$

Отже, потенціал у кутовій області має вигляд $\varphi(z) = \frac{V}{\alpha}\arg z$. Повернувшись до показникової форми, потенціал буде записаний у вигляді $\varphi(r;\theta) = \frac{V}{\alpha}\theta$. Отриманий результат має зрозумілу фізичну інтерпретацію: потенціал залежить лише від кута θ, але не залежить від відстані r до вершини кута. Це узгоджується з геометрією задачі, адже граничні умови задаються саме на сторонах кута.

Еквіпотенціальні лінії визначаються рівністю $\varphi(r,\theta) = const$. Тому $\frac{V}{\alpha}\theta = const$, звідки $\theta = const$.

Отже, еквіпотенціальні лінії у цій задачі є променями, що виходять із вершини кута.

Силові лінії електростатичного поля ортогональні до еквіпотенціальних. Оскільки еквіпотенціальні лінії є променями $\theta = \mathrm{const}$, то силові лінії мають вигляд дуг кіл $r = const$ (рис. 4).

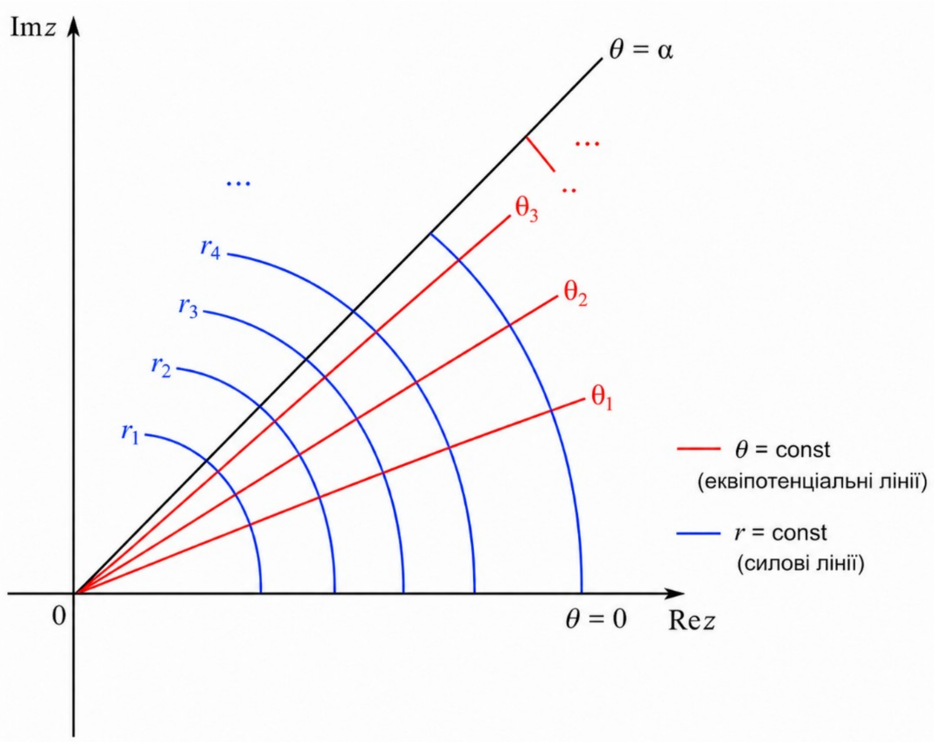

Рис. 4. Сімейства еквіпотенціальних $\theta = const$ та силових $r = const$ ліній у кутовій області $0 < \arg z < \alpha$

Таким чином, за допомогою конформного відображення складну задачу в кутовій області було зведено до простішої задачі у верхній півплощині. Це демонструє ефективність методу конформних відображень при моделюванні електростатичних полів у областях складної геометрії.

4. Порівняння з іншими методами

Окрім комплексного аналізу, використовуються інші методи, зокрема перетворення Лапласа. Цей метод застосовується для аналізу електричних кіл та дослідження процесів у часі.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто зв’язок між електростатичним потенціалом та голоморфними функціями комплексної змінної. Показано, що потенціал електростатичного поля у двовимірному випадку є гармонічною функцією, яка може бути представлена як дійсна частина голоморфної функції

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y).$$

Досліджено фізичний зміст функцій φ та ψ: перша визначає еквіпотенціальні лінії, а друга – лінії напруженості поля, які є взаємно ортогональними.

Окрему увагу приділено застосуванню конформних відображень, які дозволяють перетворювати складні геометричні області у простіші, зберігаючи кути між лініями. Це дає можливість спростити розв'язання крайових задач електростатики.

Розглянуто приклади моделювання електростатичних полів для окремих конфігурацій, зокрема поля точкового заряду та системи електродів. Показано, що використання комплексного потенціалу значно спрощує побудову як еквіпотенціальних ліній, так і силових ліній поля.

ДЖЕРЕЛА

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. К.: Вища школа, 1992.
2. Ahlfors L. *Complex Analysis*. – New York: McGraw-Hill, 1979.
3. Churchill R.V., Brown J.W. *Complex Variables and Applications*. – New York: McGraw-Hill, 2009.
4. Griffiths D.J. *Introduction to Electrodynamics*. – Pearson, 2013.
5. Haberman R. *Applied Partial Differential Equations*. – Pearson, 2013.
6. Evans L.C. *Partial Differential Equations*. – AMS, 2010.
7. Самойленко В.Г. та ін. *Комплексний аналіз. Приклади і задачі*. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2010.
8. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhyltsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science. https://doi.org/10.28925/9720213284km