

КЛАСИФІКАЦІЯ ТРИЕЛЕМЕНТНИХ НАПІВГРУП У СЕРЕДОВИЩІ MS EXCEL

Гуріч Павло Віталійович

студент групи МАМм-1-25-1.4д,

Київського столичного університету імені Бориса Грінченка,

науковий керівник – к.ф.-м.н., доц. Радченко С.П.

ВСТУП

Актуальність і постановка проблеми. Останнім часом при вивченні напівгруп були отримані цікаві результати, продовження яких було втілено у таких цікавих об'єктах, як допельнапівгрупи. Не дивлячись на достатньо складну ситуацію з отриманням математичних результатів для таких об'єктів у випадку, коли множина-носіє складається з двох елементів, кількість різних варіантів у цьому випадку достатньо обмежена. Спроба досліджувати об'єкти такого типу для випадку, коли множина-носіє складається хоча б з трьох елементів, може викликати достатню кількість проблем. Це пов'язано з необхідністю дослідити на всій множині триелементних групоїдів властивість асоціативності операції, яка задається таблицею Келі в кожному конкретному випадку. Простий підрахунок показує, що таких групоїдів доведеться перевірити 19 683. Про необхідність здійснення класифікації алгебраїчних структур було вказано в деяких наукових публікаціях. Незалежно від того, скільки серед них є напівгруп, сам процес їх виявлення може бути дуже обтяжливим.

Мета дослідження. Описати алгоритм знаходження триелементних напівгруп і їх класифікацію у середовищі MS Excel.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача класифікації напівгруп є класичною і повністю розв'язаною у теорії напівгруп. Доведено, що існує 113 триелементних напівгруп і 24 з точністю до ізоморфізму [1]. Існують праці, що класифікують з точністю до (anti-)ізоморфізму, звідки отримують число 18 [2]. Було класифіковано напівгрупи 2 – 9 порядків, зокрема з використанням комп'ютерних обрахунків [3]. Третій порядок є останнім, для якого класифікація виконувалася вручну без втручання комп'ютерів. Класифікація напівгруп здійснюється також за іншими властивостями, окрім ізоморфності. Виділяють комутативні, ідемпотентні, нільпотентні, квазітривіальні напівгрупи. Близьким поняттям до напівгруп є допельнапівгрупи, яке з'явилося лише в кінці минулого століття. Класифікацію двоелементних допельнапівгруп було здійснено в роботі Жучок Ю.В. [4]. Монографія [5] наголошує на важливості застосування цифрових технологій і математичних методів в освіті і науці.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нехай маємо групоїд $\langle G, * \rangle$, де $G = \{a, b, c\}$. Задамо його за допомогою таблиці Келі в MS Excel. Для зручності ми створимо окремий аркуш, на якому позначимо елементи як 1, 2, 3 замість a, b, c, щоб скористатися вбудованими функціями Excel. Для виконання асоціативності на заданому групоїді мають справджуватися 27 співвідношень. Їх перевірка здійснюватиметься автоматично за допомогою вбудованих функцій (Рис. 1). Функція IF

виводитиме TRUE, якщо співвідношення виконується і FALSE в іншому випадку. Щоб знайти добуток двох елементів, скористаємося функцією INDEX. Наприклад, для перевірки співвідношення $b * (a * c) = (b * a) * c$ формула матиме вигляд

=IF(INDEX(\$B\$2:\$D\$4;INDEX(\$B\$2:\$D\$4;2;1);3)=INDEX(\$B\$2:\$D\$4;2;INDEX(\$B\$2:\$D\$4;1;3));TRUE).

Якщо всі умови виконуються, отримаємо напис “Напівгрупа”, в іншому випадку – “Не напівгрупа”(Рис. 2, 3).

	A	B	C	D
1	*	1	2	3
2	1	1	3	2
3	2	2	2	1
4	3	3	3	1
5				
6	Рівність	Чи виконується		
7	$1*(1*1)=(1*1)*1$	TRUE		
8	$1*(1*2)=(1*1)*2$	FALSE		
9	$1*(1*3)=(1*1)*3$	FALSE		
10	$1*(2*1)=(1*2)*1$	TRUE		
11	$1*(2*2)=(1*2)*2$	TRUE		
12	$1*(2*3)=(1*2)*3$	TRUE		
13	$1*(3*1)=(1*3)*1$	TRUE		
14	$1*(3*2)=(1*3)*2$	TRUE		
15	$1*(3*3)=(1*3)*3$	TRUE		
16	$2*(1*1)=(2*1)*1$	TRUE		

Рис 1. Фрагмент аркушу № 1 з перевіркою асоціативності

	A	B	C	D
1	*	a	b	c
2	a	a	a	a
3	b	a	a	a
4	c	a	a	a
5				
6	Напівгрупа			

Рис. 2. Заданий групоїд є напівгрупою

	A	B	C	D
1	*	a	b	c
2	a	a	c	c
3	b	c	c	c
4	c	a	a	a
5				
6	Не напівгрупа			

Рис. 3. Заданий групоїд не є напівгрупою

Призначимо кожному групоїду номер від 0 до 19682. Потім переведемо цей номер з десяткової у трійкову систему числення за допомогою формул Excel. З цього отримаємо таблицю Келі, де цифри 0 відповідатиме елемент а, цифри 1 – b, цифри 2 – c. Отже, маючи номер групоїда, ми отримаємо його

таблицю Келі (Рис. 4). Напишемо програму, яка перебирає всі групоїди і виводить номери напівгруп:

```
For I = 0 To 19682
Worksheets(2).Range("G5").Value = I
If Worksheets(2).Range("A6").Value = "Напівгрупа" Then
Count = Count + 1
Worksheets(2).Range("G" & Count + 11).Value = I
End If
Next I
Worksheets(2).Range("G8").Value = Count
```

Програма перебирає всі числа від 0 до 19682, кожен раз змінюючи значення у клітинці G5 на аркуші № 2. Якщо значення клітинки A6 є “Напівгрупа”, то цей номер виводиться на аркуш. Таким чином отримаємо список всіх номерів напівгруп, що складається з 113 напівгруп.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	*	a	b	c			Запис групоїда за допомогою трійкової системи числення										
2	a	a	a	c			0	0	2	0	1	2	0	0	0	2	
3	b	a	b	c			6561	2187	729	243	81	27	9	3		1 допоміжний рядок	
4	c	a	a	c													
5							1595	Номер групоїда									
6	Напівгрупа						Виконати підрахунок напівгруп										
7							113 Загальна кількість напівгруп										
8							24 Кількість неізоморфних напівгруп										
9																	
10							Номера напівгруп					Номера неізоморфних напівгруп					
11							0					0					
12							1					1					
13							2					2					
14							5					5					
15							26					26					
16							29					29					
17							32					32					
18							81					83					
19							83					107					
20							87					112					
21							107					113					
22							112					116					
23																	

Рис 4. Аркуш № 2, на якому знайдено всі напівгрупи третього порядку з точністю до ізоморфізму

Щоб знайти всі напівгрупи з точністю до ізоморфізму створимо ще один аркуш, на якому для заданої напівгрупи будуть знайдені всі ізоморфні до неї (Рис .5). Для цього розглянемо всі можливі бієктивні відображення. Очевидно, що всього їх буде 6 або 5, якщо не рахувати тривіальний випадок. Щоб забезпечити виконання гомоморфізму для заданого відображення, у таблиці Келі для кожної клітинки буде формула. Нехай задано відображення $f: f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ (тобто $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$). Наприклад, нам потрібно знайти добуток $1 * 2$ (тобто $a * b$). За умовою гомоморфізму матимемо $1 * 2 = f(3) * f(1) = f(3 * 1)$. Тобто на перетині першого рядку і другого стовпця у таблиці Келі формула має знаходити значення виразу $f(3 * 1)$. Для знаходження прообразу елемента використаємо функцію MATCH. Відповідна формула матиме вигляд $=INDEX(\$B\$17:\$B\$19;INDEX(\$B\$2:\$D\$4;MATCH(\$A12;\$B\$17:\$B\$19;0);MATCH(C\$11;\$B\$17:\$B\$19;0)))$.

Для кожного відображення отримаємо таблицю Келі. Напишемо формулу, яка буде виводити номер напівгрупи, що відповідає отриманій таблиці Келі. Для цього створимо допоміжну матрицю зі степенів трійки. Створимо список номерів ізоморфних напівгруп, а також список з порядкових номерів цих напівгруп у списку напівгруп, щоб використати його для написання програми.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	*	1	2	3		*	1	2	3		*	1	2	3				
2	1	1	1	3		1	1	2	1		1	1	2	3				
3	2	1	2	3		2	1	2	1		2	2	2	3				
4	3	1	1	3		3	1	2	3		3	2	2	3				
5																		
6	Номер групоїда					Номер групоїда					Номер групоїда					Матриця для визначення номеру		
7			1595					2273					4037			6561	2187	729
8						f(1)=	1				f(1)=	2				243	81	27
9						f(2)=	3				f(2)=	1				9	3	1
10						f(3)=	2				f(3)=	3						
11	*	1	2	3		*	1	2	3		*	1	2	3		Ізоморфні напівгрупи		
12	1	1	2	2		1	1	2	3		1	1	3	3				
13	2	1	2	2		2	3	2	3		2	1	2	3				
14	3	1	2	3		3	3	2	3		3	1	3	3				
15																		
16	Номер групоїда					Номер групоїда					Номер групоїда					2273		40
17			3029					4289					5975			4037		63
18	f(1)=	2				f(1)=	3				f(1)=	3				3029		48
19	f(2)=	3				f(2)=	1				f(2)=	2				4289		70
20	f(3)=	1				f(3)=	2				f(3)=	1				5975		72

Рис. 5. Аркуш № 3 з перевіркою ізоморфності

Тепер напишемо програму яка перебирає знайдені номери напівгруп і виключає ізоморфні:

```

Dim arr(112)
For a = 0 To 112
arr(a) = Worksheets(2).Range("G" & a + 12).Value
Next a
For Each k In arr
If k <> -1 Then
Worksheets(2).Range("G5") = k
For Each n In Worksheets(3).Range("R12:R16")
If arr(n) <> k Then arr(n) = -1
Next n
End If
Next k
For Each k In arr
If k <> -1 Then
Worksheets(2).Range("J" & j + 12).Value = k
j = j + 1
Worksheets(2).Range("G9").Value = j
End If
Next k

```

Тут створюється масив з номерів напівгруп. Далі перебираються всі значення масиву, присвоюючи їх значенню клітинки G5 (і клітинці C6 на аркуші №3, бо її значення співпадає з G5). Потім номери всіх ізоморфних напівгруп в масиві замінюються на -1 (в VBA немає можливості видаляти елементи з масиву). В кінці програма виводить лише ті номери, що не рівні -1. Таким чином отримали 24 попарно неізоморфні напівгрупи третього порядку.

ВИСНОВКИ

У роботі класифіковано всі триелементні напівгрупи за властивістю ізоморфності. Отримані результати співпадають з вже відомими дослідженнями по цій темі. Запропонований підхід дозволяє уникнути важких ручних обрахунків і використовує доступні інструменти, не потребуючи встановлення додаткового програмного забезпечення. Вказаний метод буде корисним як для студентів, що вивчають цю тематику, так і для дослідників, принаймні на початкових етапах.

Майбутніми дослідженнями у цьому напрямі можуть бути класифікація за іншими властивостями, а також класифікація напівгруп вищих порядків.

ДЖЕРЕЛА

1. Chotchaisthit, S., & Kaen, K. (2014). Simple Proofs Determining All Nonisomorphic Semigroups of Order 3. *Applied mathematical sciences*, 8, 1261-1269. <https://doi.org/10.12988/ams.2014.4153>
2. Distler, A., & Kelsey, T. (2013). The semigroups of order 9 and their automorphism groups. *Semigroup Forum*, 88, 93-112. <https://doi.org/10.1007/s00233-013-9504-9>
3. Distler, A. (2012). Finite Nilpotent Semigroups of Small Coclass. *Communications in Algebra*, 42, 1136 - 1150. <https://doi.org/10.1080/00927872.2012.733986>
4. Жучок Ю.В. Класифікація двоелементних допельнапівгруп. *Фізико-математична освіта*. 2020. Випуск 3(25). Частина 2. С. 38-42.
5. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhyltsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science. <https://doi.org/10.28925/9720213284km>