

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ВИРОБНИЧИХ РЕСУРСІВ У МОДЕЛІ КОББА-ДУГЛАСА МЕТОДАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Старчук Ангеліна Русланівна

студентка групи МАМм12514д

Київського столичного університету імені Бориса Грінченка

ВСТУП

Актуальність і постановка проблеми. Оптимальний розподіл обмежених виробничих ресурсів залишається однією із центральних задач економіко-математичного моделювання, а виробнича функція Кобба-Дугласа є базовим інструментом її розв'язання завдяки простій структурі та наочній економічній інтерпретації параметрів. Аналітичний пошук оптимуму методами диференціального числення часто супроводжується багатовимірністю та мінливістю реальних виробничих систем, що ускладнює перевірку результатів та аналіз їх чутливості до змін умов виробництва. Тому актуальною є задача поєднання аналітичного підходу з комп'ютерним моделюванням для визначення та верифікації оптимального співвідношення ресурсів у моделі Кобба-Дугласа.

Мета дослідження. Метою даного дослідження є знаходження оптимального розподілу виробничих ресурсів у моделі Кобба-Дугласа методом множників Лагранжа та його верифікація засобами комп'ютерного моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Виробнича функція Кобба-Дугласа, запропонована у 1928 р. [1], залишається базовим інструментом аналізу виробничих процесів і визначення оптимального розподілу ресурсів. Основи побудови виробничих функцій, їхні характеристики та оптимізаційні моделі розглянуто в навчальній літературі з економіко-математичного моделювання [2, 3]. Методи математичного програмування та пошуку умовного екстремуму, зокрема метод множників Лагранжа, висвітлено в профільних посібниках оптимізації та економіко-математичного моделювання [4, 5]. У зарубіжних виданнях умовну оптимізацію в економічних задачах систематично подано з акцентом на теоретичне обґрунтування [6, 7, 8]. Водночас у зазначених джерелах аналітичне розв'язання задачі оптимального розподілу ресурсів та перевірка достатніх умов екстремум розглядаються коротко та без комп'ютерної реалізації із візуальною верифікацією. Тому актуальною залишається задача компактного покрокового розв'язання типової двофакторної моделі Кобба-Дугласа, що поєднує аналітичний розв'язок методом множників Лагранжа, перевірку характеру екстремуму за другим диференціалом та його числову й графічну верифікацію засобами комп'ютерного моделювання, що й зумовило тему цього дослідження.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Постановка задачі, побудова математичної моделі та розв'язок задачі математичним методом

Задача. Підприємство виробляє продукцію, обсяг якої залежить від двох факторів: витрат на працю (кількість робітників, x) та витрат на капітал (кількість обладнання, y). Виробничий процес описується функцією Кобба-Дугласа:

$$Q(x, y) = 10x^{0,5}y^{0,5}$$

Вартість найму одного працівника становить 20 грошових одиниць, а вартість оренди однієї одиниці обладнання – 50 грошових одиниць. Загальний бюджет підприємства, виділений на ці ресурси, жорстко обмежений і становить 1000 грошових одиниць. Визначити оптимальний розподіл ресурсів (x та y), при якому підприємство досягне максимального обсягу випуску продукції, не перевищуючи заданий ліміт.

Математично задачу можна сформулювати як пошук умовного екстремуму цільової функції при заданому обмеженні, застосувавши метод множників Лагранжа.

Математична модель. Знайти максимум цільової функції

$$Q(x, y) = 10x^{0,5}y^{0,5} \rightarrow \max$$

за обмежень, що враховують вартість найму одного працівника та вартість оренди однієї одиниці обладнання

$$20x + 50y = 1000 \Rightarrow 20x + 50y - 1000 = 0.$$

Для зняття обмежень переходимо до безумовної оптимізації, ввівши додаткову змінну λ (множник Лагранжа):

$$L(x, y, \lambda) = 10x^{0,5}y^{0,5} + \lambda(20x + 50y - 1000).$$

Знаходимо частинні похідні функції Лагранжа за всіма змінними та прирівнюємо їх до нуля:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 5x^{-0,5}y^{0,5} - 20\lambda = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 5x^{0,5}y^{-0,5} - 50\lambda = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20x + 50y - 1000 \\ &= 0, \{ 5x^{-0,5}y^{0,5} = 20\lambda, 5x^{0,5}y^{-0,5} = 50\lambda, 20x + 50y - 1000 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \frac{5x^{-0,5}y^{0,5}}{5x^{0,5}y^{-0,5}} = \frac{20\lambda}{50\lambda}, 20x + 50y - 1000 = 0, \left\{ \frac{y}{x} = \frac{2}{5}, 20x + 50y - 1000 = 0, \right. \right.$$

$$\{ 5y = 2x, 20x + 50y - 1000 = 0, \{ x = 2,5y, 20 \cdot 2,5y + 50y - 1000 = 0,$$

$$\{ x = 2,5y, 100y = 1000, \{ x = 25, y = 10.$$

Математичний розв'язок системи вимагає знаходження всіх трьох невідомих. Знаходимо множник Лагранжа, підставивши x та y в перше рівняння:

$$5 \cdot 25^{-0,5} \cdot 10^{0,5} = 20\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{10^{0,5}}{20} \approx 0,15811.$$

Отже, стаціонарна точка $M(25;10)$ при $\lambda \approx 0,158$.

Перевіряємо чи є точка $(25;10)$ максимумом цільової функції, використовуючи другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L(x, y) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2.$$

Знаходимо другі похідні:

$$L''_{xx} = -2,5x^{-1,5}y^{0,5} = -2,5 \cdot 25^{-1,5} \cdot 10^{0,5} = -\frac{10^{0,5}}{50};$$

$$L''_{yy} = -2,5x^{0,5}y^{-1,5} = -2,5 \cdot 25^{0,5} \cdot 10^{-1,5} = -\frac{10^{0,5}}{8};$$

$$L''_{xy} = 2,5x^{-0,5}y^{-0,5} = 2,5 \cdot 25^{-0,5} \cdot 10^{-0,5} = \frac{10^{0,5}}{20}.$$

Диференціюємо рівняння зв'язку:

$$20dx + 50dy = 0 \Rightarrow 20dx = -50dy \Rightarrow dx = -2,5dy.$$

Підставляємо все у формулу другого диференціала:

$$\begin{aligned} d^2L &= L''_{xx}(-2,5dy)^2 + 2L''_{xy}(-2,5dy)dy + L''_{yy}dy^2 = \\ &= 6,25L''_{xx}dy^2 - 5L''_{xy}dy^2 + L''_{yy}dy^2 = (6,25L''_{xx} - 5L''_{xy} + L''_{yy})dy^2 = \\ &= \left(6,25 \cdot \left(-\frac{10^{0,5}}{50} \right) - 5 \cdot \frac{10^{0,5}}{20} + \left(-\frac{10^{0,5}}{8} \right) \right) dy^2 = \\ &= \left(-\frac{10^{0,5}}{8} - \frac{10^{0,5}}{4} - \frac{10^{0,5}}{8} \right) dy^2 = -\frac{4 \cdot 10^{0,5}}{8} dy^2 = -0,5 \cdot 10^{0,5} dy^2. \end{aligned}$$

Оскільки dy^2 завжди додатне, а коефіцієнт $-0,5 \cdot 10^{0,5}$ від'ємний, то $d^2L < 0$. Від'ємний знак диференціала математично доводить, що точка $M(25;10)$ є точкою умовного максимуму.

Максимальний обсяг продукції:

$$Q(x, y) = 10 \cdot 25^{0,5} \cdot 10^{0,5} = 10 \cdot 5 \cdot 3,162 \approx 158,11.$$

Отже, для максимізації виробництва підприємству необхідно найняти 25 працівників та задіяти 10 одиниць обладнання. Максимальний обсяг випуску складе 158,11 одиниць продукції.

Розв'язання задачі графічним методом (GeoGebra)

Для розв'язання задачі використовується геометрична інтерпретація. Графічне розв'язання задачі полягає у знаходженні точки дотику бюджетного обмеження (ізокости) з найвищою можливою лінією цільової функції (ізоквантою). Щоб графічно розв'язати дану задачу, потрібно виконати наступні кроки:

а) побудова бюджетного обмеження (ізокости)

$$20x + 50y = 1000;$$

б) щоб показати, як поводить себе функція $Q(x, y) = 10x^{0,5}y^{0,5}$ (ізокванта) треба побудувати її

$$10x^{0,5}y^{0,5} = t,$$

де t – певний фіксований обсяг випуску продукції;

в) оскільки шукаємо найбільше значення цільової функції за бюджетних обмежень, то поступово збільшуємо значення t та спостерігаємо, як поводить себе крива відносно нерухомої прямої бюджету.

Якщо ізокванта перетинає лінію бюджету у двох точках, то можна виробити такий обсяг продукції, але ще залишаться ресурси. Якщо ізокванта лежить вище бюджетної лінії, то такий випуск не відповідає бюджетним обмеженням. Якщо ізокванта найвищого рівня є дотичною до бюджетної лінії рівно в одній точці, то ця точка є умовним максимум (оптимальним розв'язком).

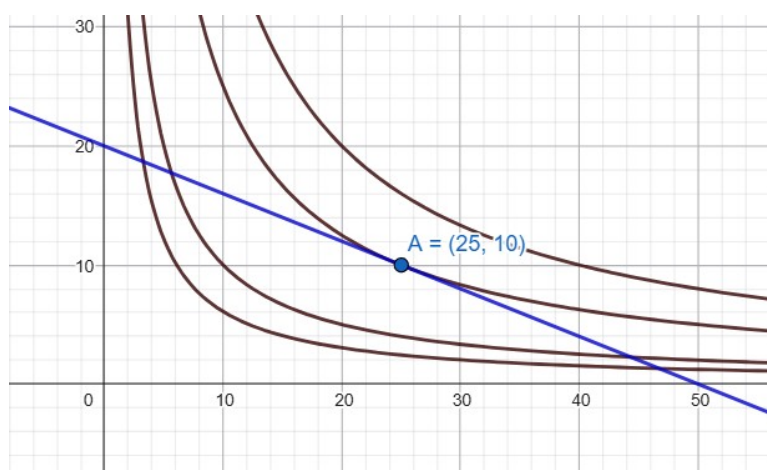


Рис. 1. Графічний розв'язок задачі (GeoGebra)

Розв'язання задачі в середовищі Maple

Для автоматизації обчислень та побудови графіку можна створити код у середовищі Maple.

Спочатку підключаємо бібліотеки:

restart; - очищує пам'ять Maple для коректного відображення нових даних;

with(plots) : - завантажує пакет для малювання складних графіків.

Задаємо цільову функцію та обмеження.

$Q := (x, y) \rightarrow 10 * x^{(1/2)} * y^{(1/2)};$

$g := (x, y) \rightarrow 20*x + 50*y - 1000;$

Будуємо функцію Лагранжа.

$L := Q(x, y) + \text{lambda} * g(x, y);$

Знаходимо частинні похідні та формуємо систему.

$eq1 := \text{diff}(L, x) = 0;$

$eq2 := \text{diff}(L, y) = 0;$

$eq3 := \text{diff}(L, \text{lambda}) = 0;$

Знаходимо аналітичний розв'язок системи. Витягуємо координати точки умовного максимуму та максимальний обсяг із розв'язку.

```
sol := solve({eq1, eq2, eq3}, {x, y, lambda});
x_opt := eval(x, sol);
y_opt := eval(y, sol);
Q_opt := eval(Q(x,y), sol);
print("Оптимальна кількість робітників (x) =", x_opt);
print("Оптимальна кількість обладнання (y) =", y_opt);
print("Максимальний випуск продукції (Q_opt) =", evalf(Q_opt));
Будуємо бюджетну лінію (ізокосту).
isocost := implicitplot(g(x, y) = 0, x=0..50, y=0..30, color=red, thickness=2);
Будуємо лінії рівня (ізокванти).
isoquants := contourplot(Q(x, y), x=0..50, y=0..30,
contours=[50, 100, evalf(Q_opt), 200],
color=blue, thickness=1,
title="Оптимізація ресурсів: Ізокванти та Ізокоста");
Накладаємо всі умови на графік.
optimal_point := pointplot([[x_opt, y_opt]], symbol=solidcircle,
symbolsize=15, color=black):
display({isoquants, isocost, optimal_point});
```

Після запуску коду, отримуємо числовий (оптимальна кількість робітників $x = 25$, оптимальна кількість обладнання $y = 10$, максимальний випуск продукції $Q = 158,11$) та графічний результати розв'язку задачі (Рис. 2).

```
x_opt := 25
y_opt := 10
Q_opt := 10 √ 25 √ 10
"Оптимальна кількість робітників (x) =", 25
"Оптимальна кількість обладнання (y) =", 10
"Максимальний випуск продукції (Q_opt) =", 158.1138830
```

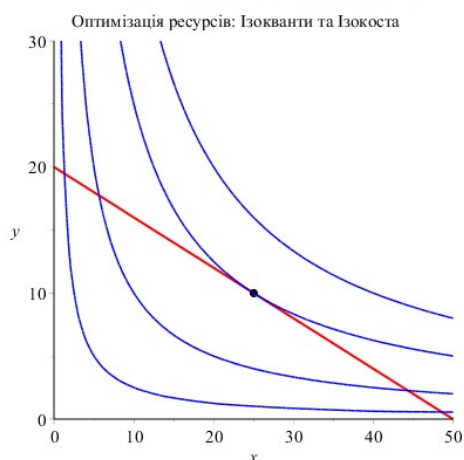


Рис. 2. Числовий та графічний результати розв'язку задачі (Maple)

Аналіз методів розв'язання задачі

Основним інструментом аналітичного дослідження обрано метод множників Лагранжа, який дозволяє здійснити перехід від задачі умовної оптимізації до пошуку безумовного екстремуму шляхом введення додаткової змінної λ . Перевірка достатніх умов існування екстремуму реалізується через дослідження знаку другого диференціала d^2L .

Для верифікації аналітичних розрахунків та візуалізації результатів застосовано динамічну візуалізацію в GeoGebra та систему комп'ютерної алгебри Maple. У таблиці 1 наведено порівняльний аналіз застосованих методологічних підходів.

Таблиця 1

Порівняльний аналіз методів

Критерій	Метод множників Лагранжа (аналітичний)	Динамічна візуалізація (GeoGebra)	Символьні обчислення (Maple)
Сутність методу	Формування допоміжної функції із параметром λ	Геометричне моделювання та інтерактивна побудова графіків	Автоматизоване розв'язання систем нелінійних рівнянь
Переваги	Універсальність для функції багатьох змінних	Наочність, легкість побудови ліній рівня (ізоквант)	Висока точність, відсутність арифметичних похибок
Недоліки	Збільшення розмірності системи (через λ)	Обмежені можливості для задач великої розмірності	Потребує навичок програмування та алгоритмізації

Кожен із розглянутих методів має свої сильні сторони та обмеження – метод множників Лагранжа забезпечує універсальність для багатьох змінних, GeoGebra дає високу точність, а Maple гарантує точність і автоматизацію. Найбільш ефективним є їх комплексне застосування, де аналітичний метод слугує основним інструментом розв'язання, а програмні засоби використовуються для візуалізації та верифікації отриманих результатів.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто задачу оптимального розподілу виробничих ресурсів у моделі Кобба-Дугласа методами диференціального числення та комп'ютерного моделювання. З отриманих даних чітко простежується закономірність: оптимальне співвідношення між факторами виробництва залишається константою незалежно від масштабу фінансування, тобто лінія розвитку підприємства є променем, що виходить із початку координат, а точки дотику ізокост та ізоквант лежать на одній прямій, що відповідає оптимальній виробничій стратегії. У ході дослідження:

5. аналітичним методом множників Лагранжа знайдено стаціонарну точку;
6. за знаком другого диференціала доведено, що це точка умовного максимуму;
7. досліджено вплив зміни бюджетного обмеження на оптимальні пропорції факторів виробництва;
8. результат підтверджено графічно у GeoGebra та засобами Maple, код яких дозволяє адаптувати модель під нові параметри.

Отримані результати підтверджують доцільність застосування апарату диференціального числення для задач оптимізації техніко-економічних систем. Запропонований підхід дозволяє не лише знайти точку екстремуму, але й математично обґрунтувати її характер.

Подальші дослідження будуть спрямовані на інтеграцію класичних диференціальних методів із алгоритмами цілочислового програмування та машинного навчання, що дозволить адаптувати створені моделі до жорстких дискретних обмежень реальних підприємств.

ДЖЕРЕЛА

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A Theory of Production. American Economic Review. 1928. Vol. 18, No. 1. P. 139-165.
2. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: навч. посібник. Київ: КНЕУ, 2003. 408 с.
3. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку: підручник. Київ: Вища школа, 1999. 236 с.
4. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування: навч.-метод. посібник. Київ: КНЕУ, 2001. 248 с.
5. Економіко-математичне моделювання: навч. посібник / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.
6. Chiang A. C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. 4th ed. McGraw-Hill, 2005.
7. Simon C. P., Blume L. Mathematics for Economists. W. W. Norton, 1994.
8. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhyltsov, O., Ilich, L., Kobets, N., Kovaliuk, T., Kuchakovska, H., Lytvyn, O., Lytvyn, P., Mashkina, I., Morze, N., Nosenko, T., Proshkin, V., Radchenko, S., & Yaskevych, V. (2021). Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science.
URL: <https://doi.org/10.28925/9720213284km>