

ВПЛИВ ГЕОМЕТРІЇ ЕЛЕКТРОДІВ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНОСТІ ДВОВИМІРНИХ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ

Хачатрян Адам Роландович

Студент групи Мам-1-25-1.4-д

Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, м. Київ

Науковий керівник – к. ф.-м. н., доц. Астаф'єва М. М.

ВСТУП

Актуальність і постановка проблеми. У попередній публікації автора [1] було розглянуто застосування голоморфних функцій та конформних відображень до двовимірних задач електростатики. Зокрема, досліджено логарифмічну модель поля та задачу в кутовій області між двома провідними півпрямими. Отримані результати дозволили встановити геометричну структуру екіпотенціальних і силових ліній. Наступним кроком стало дослідження не лише форми цих ліній, а й **кількісного впливу геометричних параметрів області на напруженість поля**. Таке завдання має значення для аналізу електродних систем, оскільки зміна відстані між електродами, величини кута або співвідношення радіусів призводить до зміни локальної концентрації поля.

Мета дослідження. Розширити комплексно-аналітичний підхід, представлений у [1], на конфігурації паралельних та концентричних електродів; порівняти отримані розподіли напруженості; визначити чутливість поля до характерних геометричних параметрів і продемонструвати результати на числовому прикладі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Математичну основу дослідження становлять властивості гармонічних і голоморфних функцій та конформних відображень [2; 3]. Фізичну інтерпретацію потенціалу й напруженості електростатичного поля наведено в [4], а загальні підходи до крайових задач для рівняння Лапласа — у [5]. На відміну від попередньої роботи автора [1], у цій публікації основну увагу приділено порівнянню різних електродних конфігурацій і параметричному аналізу отриманих формул. Питання математичного та комп'ютерного моделювання в міждисциплінарному контексті також висвітлено в [6].

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Математична модель і вихідні припущення. Розглядаємо двовимірні електростатичні поля в однорідному ізотропному діелектрику в областях без вільного об'ємного заряду. Потенціал $\varphi(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа, а напруженість визначається його градієнтом:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

У тих частинах області, де існує гармонічно спряжена функція ψ , комплексний потенціал $f(z) = \varphi + i\psi$ є голоморфним. З урахуванням умов Коші–Рімана його похідна дозволяє визначити компоненти поля:

$$E_x + iE_y = -\overline{f'(z)}.$$

Для чистоти порівняння використовуємо ідеалізовані електроди, а крайовими ефектами на кінцях скінченних провідників нехтуємо.

2. Поле між паралельними електродами. Нехай електроди відповідають прямим $y = 0$ і $y = a$, а їхні потенціали дорівнюють відповідно 0 та V . У смугі $0 < y < a$ розв'язок задачі Діріхле має вигляд

$$\varphi(x, y) = \frac{V}{a}y, \quad f(z) = -i\frac{V}{a}z, \quad |\mathbf{E}| = \frac{|V|}{a}.$$

Таким чином, поле є однорідним, а відстань a визначає його напруженість за обернено пропорційним законом. Ця конфігурація, на відміну від прикладів у [1], дає зручну еталонну модель для порівняння з неоднорідними полями.

3. Узагальнення кутової моделі. У [1] для області $0 < \arg z < \alpha$ із граничними потенціалами 0 та V за допомогою відображення $w = z^{\pi/\alpha}$ було отримано потенціал $\varphi(r, \theta) = V\theta/\alpha$. На наступному етапі дослідження визначено напруженість та її залежність від кута:

$$|\mathbf{E}(r)| = \frac{|V|}{\alpha r}, \quad \frac{\partial |\mathbf{E}|}{\partial \alpha} = -\frac{|V|}{\alpha^2 r}.$$

За фіксованих V і r зменшення кута α приводить до зростання напруженості. Зокрема, зменшення α на 10 % збільшує $|\mathbf{E}|$ у $1/0,9 \approx 1,111$ раза, тобто приблизно на 11,1 %. Залежність від кута при фіксованих V та r зображено на рис. 1.

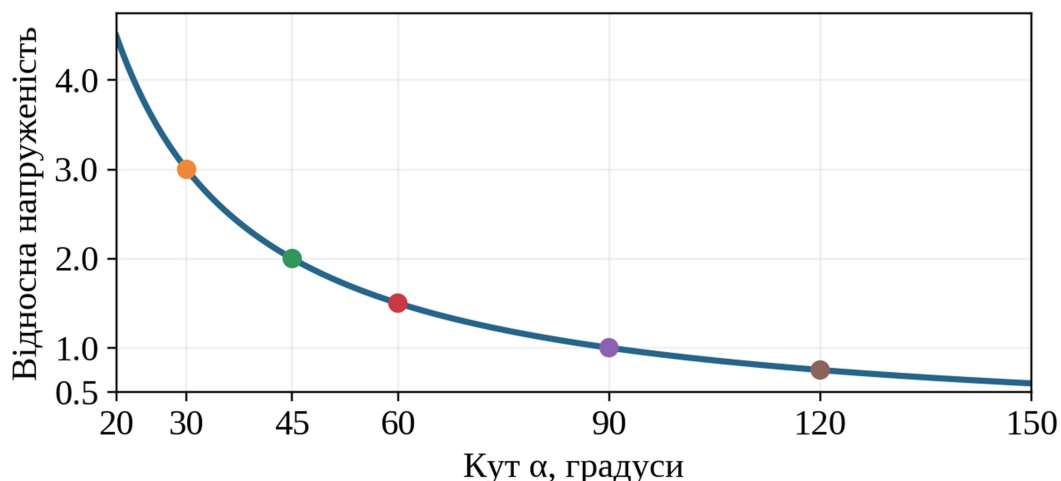


Рис. 1. Відносна напруженість у кутовій області залежно від кута α (за сталих V та r).

4. Поле між концентричними електродами. Новим, порівняно з [1], є розгляд кільцевої області $R_1 < r < R_2$, обмеженої концентричними циліндричними електродами з потенціалами V_1 та V_2 . З радіальної симетрії та рівняння Лапласа випливає

$$\varphi(r) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1}, \quad |\mathbf{E}(r)| = \frac{|V_2 - V_1|}{r \ln(R_2/R_1)}.$$

На будь-якій однозв'язній підобласті кільця, де вибрано гілку логарифма, відповідний комплексний потенціал можна записати як $f(z) = V_1 + A \operatorname{Log}(z/R_1)$, де $A = (V_2 - V_1)/\ln(R_2/R_1)$. Незважаючи на багатозначність логарифма в усьому кільці, його дійсна частина, потенціал φ , є однозначною. Відношення модулів напруженостей біля внутрішнього та зовнішнього електродів визначається лише геометрією:

$$\frac{|\mathbf{E}(R_1)|}{|\mathbf{E}(R_2)|} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Отже, поле є найсильнішим біля внутрішнього електрода. Крім того, для однорідного діелектрика з проникністю ε з отриманого потенціалу визначається ємність на одиницю довжини коаксіальної системи: $C' = 2\pi\varepsilon/\ln(R_2/R_1)$. Розподіл екіпотенціальних та силових ліній у кільцевій області подано на рис. 2.

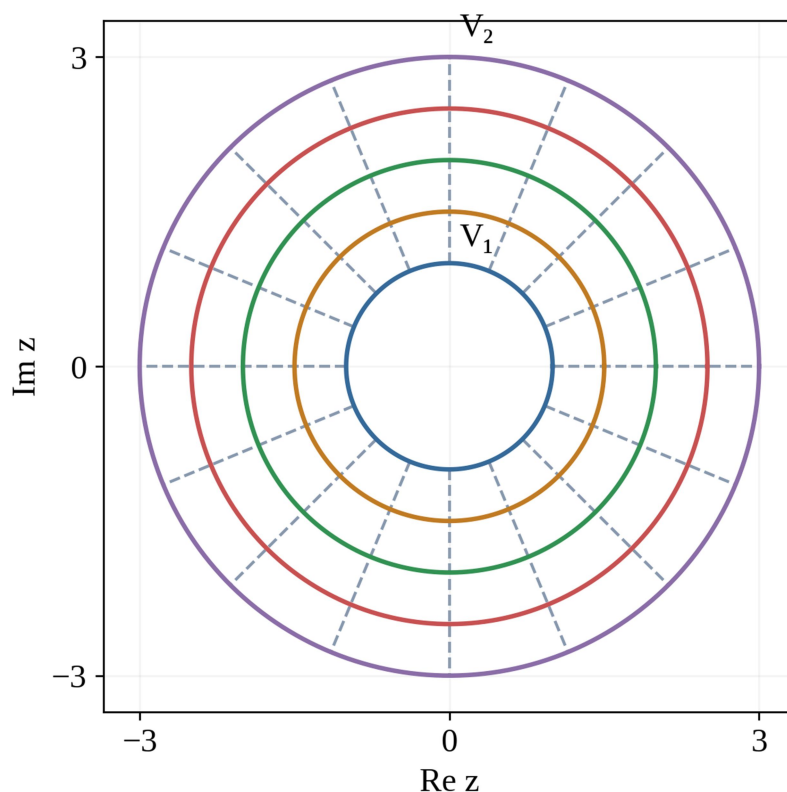


Рис. 2. Екіпотенціальні та силові лінії поля між концентричними електродами.

5. Чутливість до геометричних параметрів. Для кількісного порівняння введемо безрозмірний коефіцієнт чутливості $S_p = (p/|\mathbf{E}|) \partial|\mathbf{E}|/\partial p$, який

показує відносну зміну напруженості за малої відносної зміни параметра p . Для кільцевої області позначимо $\kappa = R_2/R_1 > 1$ і змінюватимемо κ за сталих різниці потенціалів та точки спостереження r , наприклад шляхом зміни R_2 . Отримуємо такі співвідношення:

Таблиця 1.

Чутливість напруженості до геометричних параметрів

Конфігурація	Модуль напруженості	Параметр p	Коефіцієнт S_p
Паралельні електроди	$\frac{ V }{a}$	a	-1
Кутова область	$\frac{ V }{\alpha r}$	α	-1
Концентричні електроди	$\frac{ V_2 - V_1 }{r \ln \kappa}$	κ	$\frac{-1}{\ln \kappa}$

На відміну від двох перших конфігурацій, відносна чутливість кільцевої моделі не є сталою: для відношень радіусів κ , близьких до 1, вона може набувати великих за модулем значень, а зі збільшенням κ її модуль поступово зменшується. Отже, навіть для моделей, у яких $|E| \sim 1/r$, характер впливу геометричного параметра може істотно відрізнятись.

6. Числова ілюстрація та перевірка. Для різниці потенціалів 1000 В між паралельними електродами з відстанню $a = 0,02$ м отримуємо $|E| = 50$ кВ/м. У кутовій області за $\alpha = \pi/6$ та $r = 1$ мм маємо $|E| \approx 1,91$ МВ/м. Для концентричних електродів із $R_1 = 0,01$ м, $R_2 = 0,05$ м та різницею потенціалів 1000 В напруженість становить приблизно 62,1 кВ/м на внутрішній і 12,4 кВ/м на зовнішній межі. Наведені значення характеризують різні ідеалізовані конфігурації й не є прямим зіставленням конструкцій однакового розміру.

Коректність наведених формул перевірено підстановкою до рівняння Лапласа, виконанням граничних умов та узгодженням вектора $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ з похідною комплексного потенціалу. Додатково лінійний потенціал між паралельними електродами може бути використаний як контрольна задача для п'ятиточкової скінченно-різницевої схеми: його значення точно задовольняють дискретне рівняння у внутрішніх вузлах рівномірної сітки.

ВИСНОВКИ

Порівняно з попередньою публікацією [1] дослідження доповнено двома електродними конфігураціями — паралельною та концентричною — і здійснено кількісний аналіз напруженості поля. Показано, що між паралельними електродами напруженість стала, тоді як у кутовій і кільцевій областях вона змінюється за законом $1/r$. Для кутової задачі встановлено сталу відносну чутливість $S_\alpha = -1$, а для кільцевої — залежність $S_\kappa = -1/\ln\kappa$. На числових прикладах продемонстровано роль геометричних параметрів у концентрації поля. Одержані результати розширюють геометричний опис із [1] до порівняльного параметричного аналізу та можуть використовуватися як

аналітичні еталони для перевірки чисельних моделей двовимірної електростатики. Подальші дослідження доцільно спрямувати на скінченні електроди, крайові ефекти й складніші області.

ДЖЕРЕЛА

1. Хачатрян А. Р. Методи комплексного аналізу в дослідженні електростатичних полів. Збірник матеріалів Всеукраїнської конференції молодих учених «Інформаційні технології». 2026. № 13. С. 232–237. URL: <https://zcit.kubg.edu.ua/index.php/journal/article/view/102>.
2. Ahlfors L. V. Complex Analysis. 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1979.
3. Brown J. W., Churchill R. V. Complex Variables and Applications. 8th ed. New York : McGraw-Hill, 2009.
4. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics. 4th ed. Boston : Pearson, 2013.
5. Evans L. C. Partial Differential Equations. 2nd ed. Providence, RI : American Mathematical Society, 2010.
6. Abramov V., Astafieva M., Boiko M., Bodnenko D., Bushma A., Vember V., Hlushak O., Zhylytsov O., Ilich L., Kobets N., Kovaliuk T. Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science : collective monograph. Kyiv : Borys Grinchenko Kyiv University, 2021. DOI: <https://doi.org/10.28925/9720213284km>.