

РОЛЬ ТА ЗАСТОСУВАННЯ РЕКУРСІЇ В СУЧАСНІЙ МАТЕМАТИЦІ

Гуріч П. В.

Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, м. Київ

Постановка проблеми. Рекурсія в математиці відіграє ключову роль у моделюванні складних структур та процесів, що зустрічаються в різних областях. Основна ідея рекурсії полягає в тому, щоб розкласти задачу на менші задачі того ж типу. Вміння бачити такі декомпозиції є важливою навичкою в математиці. Ця робота досліджує основні концепції та застосування рекурсії в різних галузях математики, зокрема в теорії множин, комбінаториці, теорії чисел та теорії графів. Аналізуються приклади використання рекурсивних методів для вирішення класичних математичних проблем, таких як обчислення факторіалу, генерація комбінаторних об'єктів та розклад числа на множники. Досліджується вплив рекурсії на розвиток математичної думки та роль комп'ютерних технологій у сприянні її застосування. Зокрема, було застосовано такий цифровий інструмент як Desmos. Він дозволяє будувати не лише графіки функцій, але й має багато корисних інструментів для геометричних побудов, тому він чудово підходить для дослідження рекурсії.

Аналіз літератури. Одні з перших досліджень щодо загального застосування методу рекурсії в обчислювальній фізиці твердого тіла розглянуто в дослідженні Pettifor [1]. В статті Н. Peelle [2] автор демонструє кілька рекурсивних комп'ютерних програм для вивчення математики. Теорію рекурсії як окрему галузь чистої математики розглянуто в книзі F. Drake et al. [3]. Про застосування рекурсії в теорії множин сказано в статті Lawrence Charles Paulson [4]. Застосування рекурсії в теорії чисел та теорії графів розглянуто в статті Jonathan Burns [5]. Автори статті A. Buriboev et al. [6] розробили метод рекурсивного фрактального моделювання, призначений для генерації складних фрактальних візерунків. Дослідження T. Coquand [7] порушують питання про необхідність рекурсивних функцій для суворого розвитку конструктивної математики. Про вплив інтеграції рекурсивних співвідношень у навчальну програму з дискретної математики розповідають Fadilla Sri Utami Siregar et al [8]. Монографія [9] наголошує на важливості застосування цифрових технологій і математичних методів в освіті і науці.

Предмет дослідження. Математичні методи, принципи та моделі, що базуються на рекурсії, а також їх теоретичні й прикладні властивості в різних розділах математики.

Об'єкт дослідження. Рекурсія як фундаментальний підхід у математиці, зокрема рекурсивні визначення, рекурентні співвідношення, рекурсивні алгоритми та структури.

Мета роботи. Дослідити сутність рекурсії, визначити її роль у сучасній математиці та проаналізувати основні напрями її застосування в теоретичних і прикладних задачах.

Завдання дослідження:

- Розкрити поняття рекурсії та її математичну природу.
- Проаналізувати основні типи рекурсивних визначень і рекурентних співвідношень.
- Дослідити роль рекурсії в різних розділах математики (комбінаторика, теорія чисел, теорія графів, фрактальна геометрія тощо).
- Розглянути приклади класичних рекурсивних структур (наприклад, послідовність Фібоначчі, дерева, фрактали).
- Узагальнити значення рекурсії як універсального інструменту математичного моделювання.

1. Основні концепції рекурсії в математиці

- Сутність рекурсії.

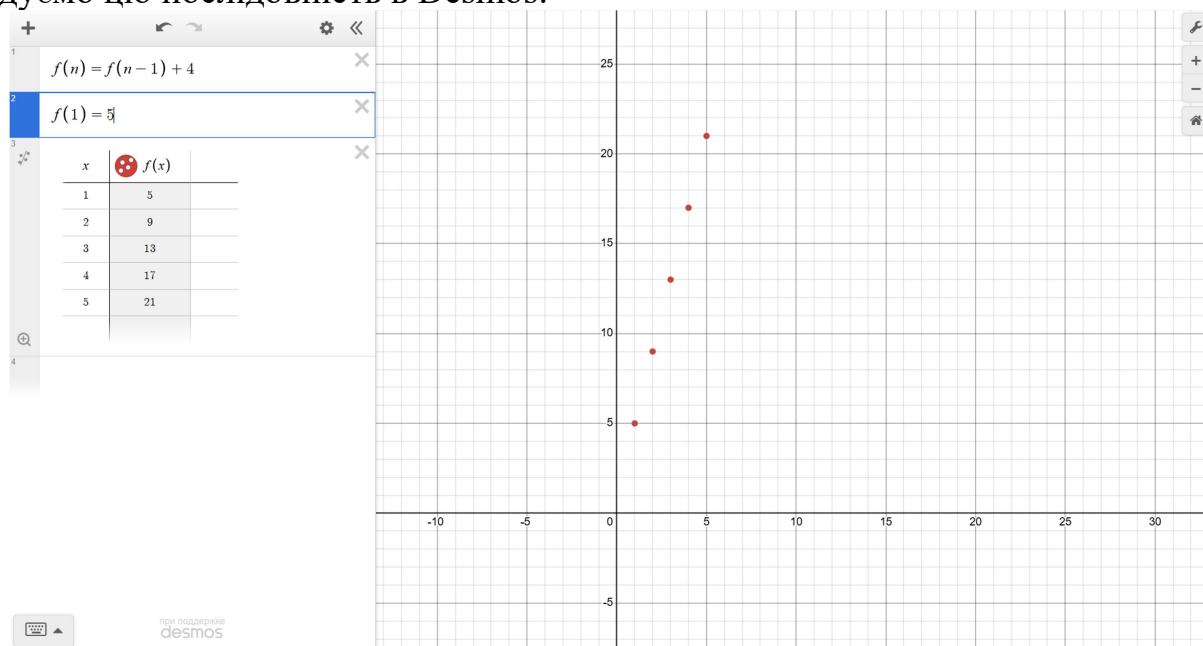
Рекурсія — це спосіб визначення функцій, послідовностей або структур, при якому значення на певному кроці визначається через значення на попередніх кроках.

Зазвичай рекурсивне означення має дві частини:

1. **Базовий випадок** – початкове значення.
2. **Рекурсивне правило** – формула, яка виражає наступний елемент через попередні.

- Приклад рекурсії.

Наведемо простий приклад рекурсії. Розглянемо послідовність 5,9,13,17,... Цю послідовність можна задати рекурсивно. Тут $f(1) = 5$ – базовий випадок, а $f(n) = f(n - 1) + 4$ – рекурсивне правило. Побудуємо цю послідовність в Desmos:



2. Рекурсія в комбінаториці

У комбінаториці рекурсія використовується для:

- підрахунку кількості об'єктів,
- побудови комбінаторних структур,
- виведення рекурентних співвідношень.

Ось декілька прикладів:

- Рекурсія Паскаля:

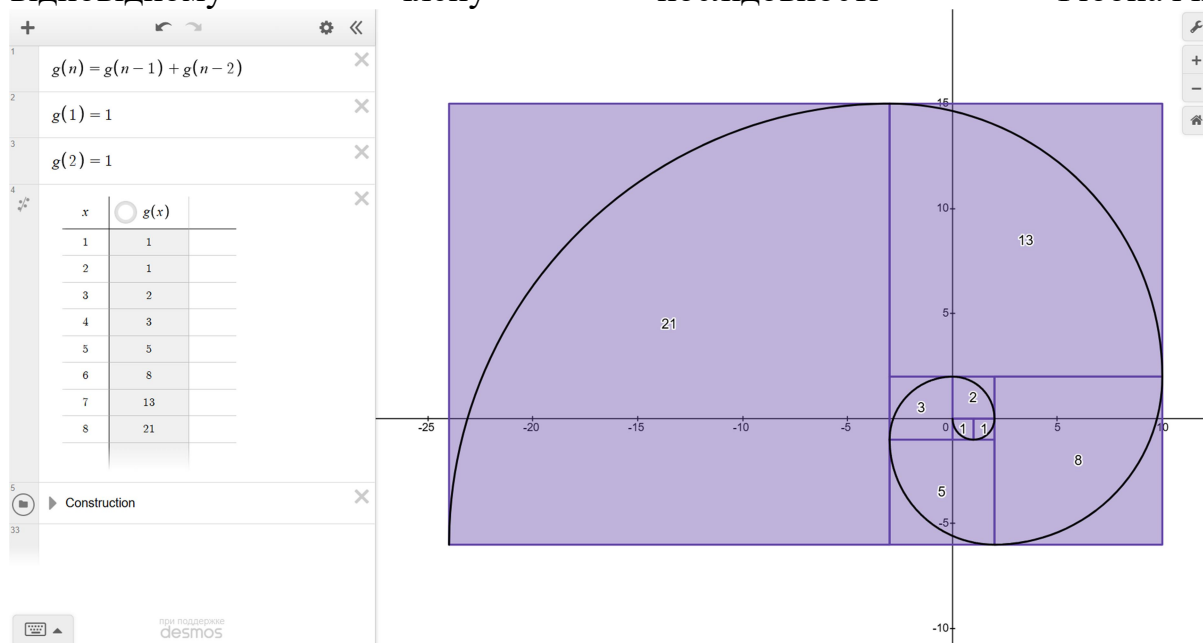
$$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$$

- Рекурсія для перестановок:

$$P(n) = n \cdot P(n - 1), P(0) = 1$$

- Числа Фібоначчі.

Послідовність Фібоначчі – одна з найвідоміших рекурсивних послідовностей в математиці. Вона визначається шляхом додавання двох попередніх членів послідовності. Її перші декілька членів: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... З нею пов'язана так звана спіраль Фібоначчі, яку можна побудувати за допомогою Desmos. Кожен квадрат має сторону, яка дорівнює відповідному члену послідовності Фібоначчі.



3. Рекурсія в теорії чисел

У теорії чисел рекурсія використовується для:

- визначення числових функцій,
- алгоритмів,
- доведень.

Наведемо такі приклади:

- Факторіал :

$$n! = n \cdot (n - 1)!, 0! = 1$$

- Лінійні рекурентні послідовності:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

- Алгоритм Евкліда:
Рекурсивне визначення НСД:

$$\text{НСД}(a, b) = \text{НСД}(b, a \bmod b)$$

Застосуємо цей алгоритм в Desmos, вказавши базовий випадок, а саме $\text{НСД}(a, 0) = a$:

1	$f(a,b) = f(b, \text{mod}(a,b))$	×
2	$f(a,0) = a$	×
3	$f(3,17)$	×
		= 1
4	$f(5,25)$	×
		= 5
5	$f(384,944)$	×
		= 16

4. Рекурсія у фрактальній геометрії

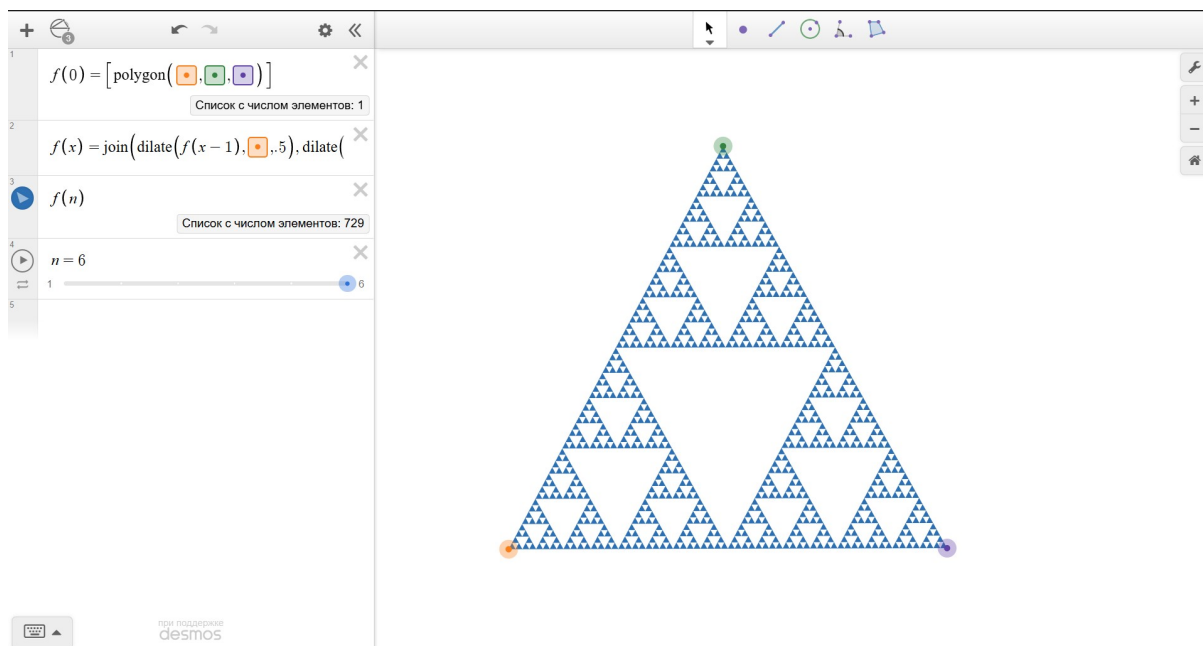
Фрактали демонструють явище самоподібності — кожна частина структури подібна до цілого. Це означає, що:

- структура повторюється на різних масштабах,
- рекурсія забезпечує цю повторюваність.

Основні приклади:

- Крива Коха,
- Трикутник Серпінського,
- Множина Мандельброта.

Алгоритм побудови трикутника Серпінського такий: Береться рівносторонній трикутник. На першому кроці видаляється трикутник з вершинами в середині сторін початкового трикутника. На другому кроці аналогічні трикутники із трьох менших трикутників, які залишилися після першого кроку, і т. д. Якщо здійснити 6 ітерацій, то отримаємо такий результат:



5. Рекурсія в теорії графів

- Рекурсивні алгоритми пошуку шляхів та циклів у графах.
- Застосування рекурсії до теореми про кольорування графів.

6. Рекурсія в теорії множин

- Рекурсивні означення множин.
- Рекурсивні означення функцій.

7. Вплив рекурсії на математичну думку

- Роль рекурсії у розв'язанні відомих математичних проблем.
- Використання комп'ютерних технологій для підтримки

рекурсивних обчислень.

ВИСНОВКИ.

Рекурсія в математиці відіграє важливу роль у вирішенні різних математичних завдань, від простих обчислень до складних теоретичних конструкцій. Її використання дозволяє не тільки розв'язувати класичні проблеми більш ефективним чином, але й сприяє розвитку математичної науки, відкриваючи нові горизонти для дослідження.

ДЖЕРЕЛА

1. Pettifor, D., & Weaire, D. (1987). The Recursion Method and Its Applications. *Mathematics of Computation*, 46, 358. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-82444-9>.
2. Peelle, H. (1976). Learning mathematics with recursive computer programs. , 116-130. <https://doi.org/10.1145/800107.803461>.
3. Drake, F., & Wainer, S. (1980). Recursion Theory: its Generalisations and Applications. . <https://doi.org/10.1017/cbo9780511629181>.
4. Paulson, L. (2022). Induction and Recursion.
5. Burns, J. (2014). Recursive Methods in Number Theory, Combinatorial Graph Theory, and Probability.

6. Buriboev, A., Sultanov, D., Ibrohimova, Z., & Jeon, H. (2025). Mathematical Modeling and Recursive Algorithms for Constructing Complex Fractal Patterns. *Mathematics*. <https://doi.org/10.3390/math13040646>.
7. Coquand, T. (2014). Recursive Functions and Constructive Mathematics. , 159-167. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9217-2_6.
8. Siregar, F., Rambe, A., & Amir, A. (2025). Analisis Metode Penyelesaian Relasi Rekursif dalam Matematika Diskrit serta Implikasinya terhadap Pembelajaran. *Journal of Natural Sciences*. <https://doi.org/10.34007/jonas.v6i3.1025>.
9. Abramov, V., Astafieva, M., Boiko, M., Bodnenko, D., Bushma, A., Vember, V., Hlushak, O., Zhyltsov, O., Ilich, L., Kobets, N. and Kovaliuk, T., 2021. Theoretical and practical aspects of the use of mathematical methods and information technology in education and science [online] <https://doi.org/10.28925/9720213284km>.